

# DISKRETNII SIGNALI

*Diskretni signal* je jednoznačno definisan samo u diskretnim vremenskim trenucima. Ukoliko je amplituda diskretnog signala kvantovana, govorimo o *digitalnim signalima*. Diskretne signale označavamo sa  $x(n)$  i zapisujemo kao sekvence brojeva, odnosno funkcije diskretne varijable, pri čemu umjesto oznake nezavisne varijable koristimo indeks  $n$ . Ako se drugačije ne naglasi, podrazumijeva se da je diskretni signal definisan za svako  $n \in \mathbb{Z}$ . Kao primjere analitičkog zapisa diskretnih signala možemo navesti: diskretni eksponencijalni signal  $x(n) = e^{-n}$ , sinusni signal  $x(n) = \sin \omega_0 n$ , signal definisan po oblastima oblika  $x(n) = 1, |n| \leq N_0 \wedge x(n) = 0, |n| > N_0, N_0 \in \mathbb{N}$ , itd... Pri ovakvom označavanju podrazumijevamo da se radi o signalima koji su funkcije jedne nezavisne varijable. Ako su signali funkcije dvije ili više nezavisnih varijabli zapisujemo ih u vidu matrica, odnosno višedimenzionalnih formi podataka. Na primjer, dvodimenzionalni diskretni eksponencijalni signal analitički zapisujemo u obliku  $x(n, m) = e^{-(n+m)}$ . Višedimenzionalne signale koji se mogu zapisati u obliku proizvoda više jednodimenzionalnih signala nazivamo *separabilnim signalima*.

## 2.1 Klasifikacija diskretnih signala

Ovisno o tome kakva je priroda fizičkih pojava koje opisuju, diskretni signali mogu biti periodični ili neperiodični, deterministički ili stohastički, te signali energije ili signali snage. Diskretni signali se takođe mogu podijeliti na realne i kompleksne, iako ova podjela ne oslikava neminovno prirodu signala.

### 2.1.1 Realni i kompleksni signali

Ako su elementi sekvence koja predstavlja diskretni signal realni brojevi, govorimo o *realnim diskretnim signalima*, a ako su ti elementi kompleksni brojevi i za signal kažemo da je *kompleksni diskretni signal*. Kompleksni signali često nastaju vještačkim spajanjem realnih signala ili kao rezultat matematičkih operacija, u kom slučaju ne moraju da imaju bilo kakvo fizičko značenje. Pri tome su vrijednosti kompleksnih signala predstavljaju svojim realnim i imaginarnim dijelom, ili modulom i argumentom kompleksnog broja, kao na Slici 2.1. Diskretni signali su najčešće funkcije nezavisne diskretne realne varijable, ali mogu biti i realne, odnosno kompleksne funkcije kompleksne varijable. Većinu fizičkih pojava opisujemo realnim signalima, ali neke pojave, kao na primjer strujanja vode ili jačinu električnog polja lakše opisujemo kompleksnim signalima, gdje intenzitet predstavljamo modulom, a smjer argumentom kompleksnog broja.

### 2.1.2 Parni i neparni signali

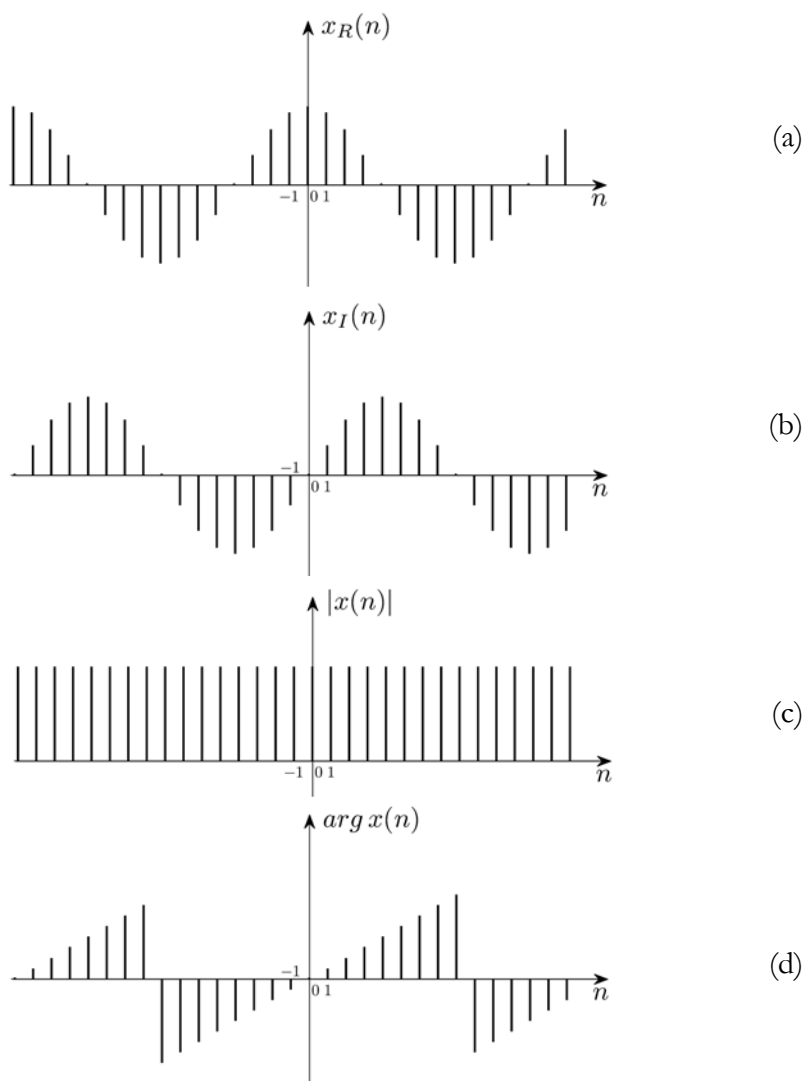
Za signal kažemo da je *paran* ako je osno simetričan u odnosu na ordinatu. Za parne signale vrijedi da je

$$x(-n) = x(n). \quad (2.1)$$

*Neparni signali* su centralno simetrični u odnosu na koordinatni početak i vrijedi da je

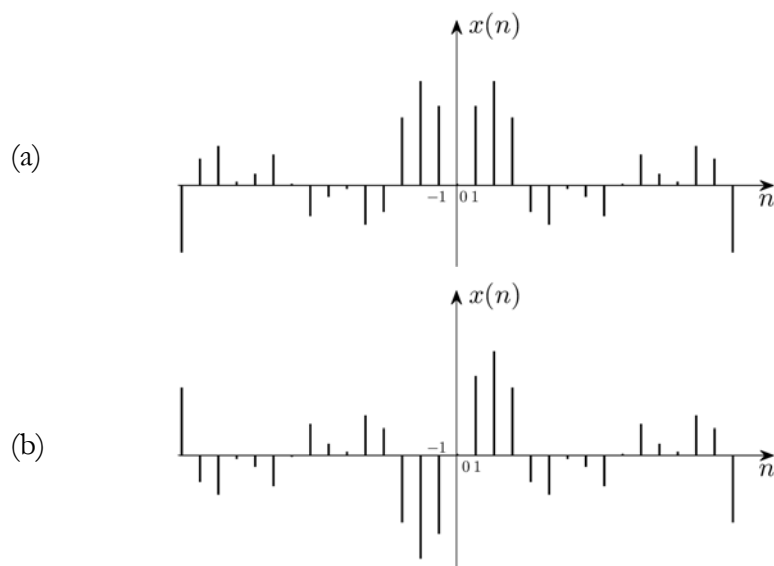
$$x(-n) = -x(n). \quad (2.2)$$

Primjeri parnih i neparnih signala dati su na Slici 2.2.



Slika 2.1 (a) Realni dio, (b) imaginarni dio; (c) modul i (d) argument diskretnog kompleksnog signala.

Važno je uočiti da je signal proizvoljnog oblika moguće razložiti na sumu dva signala od kojih je jedan paran, a drugi neparan. Ako parni dio signala označimo sa  $\mathcal{P}\{x(n)\}$ , a neparni dio signala sa  $\mathcal{N}\{x(n)\}$ , predstavimo signal proizvoljnog oblika kao zbir njegovog parnog i neparnog dijela:



Slika 2.2 (a) Parni i (b) neparni signal.

$$x(n) = \mathcal{E}\{x(n)\} + \mathcal{N}\{x(n)\}. \quad (2.3)$$

Na osnovu osobina parnih i neparnih signala vrijedi da je

$$x(-n) = \mathcal{E}\{x(-n)\} + \mathcal{N}\{x(-n)\} = \mathcal{E}\{x(n)\} - \mathcal{N}\{x(n)\}, \quad (2.4)$$

te se parni i neparni dio signala određuju na sljedeći način:

$$\mathcal{E}\{x(n)\} = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)], \quad (2.5)$$

$$\mathcal{N}\{x(n)\} = \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)]. \quad (2.6)$$

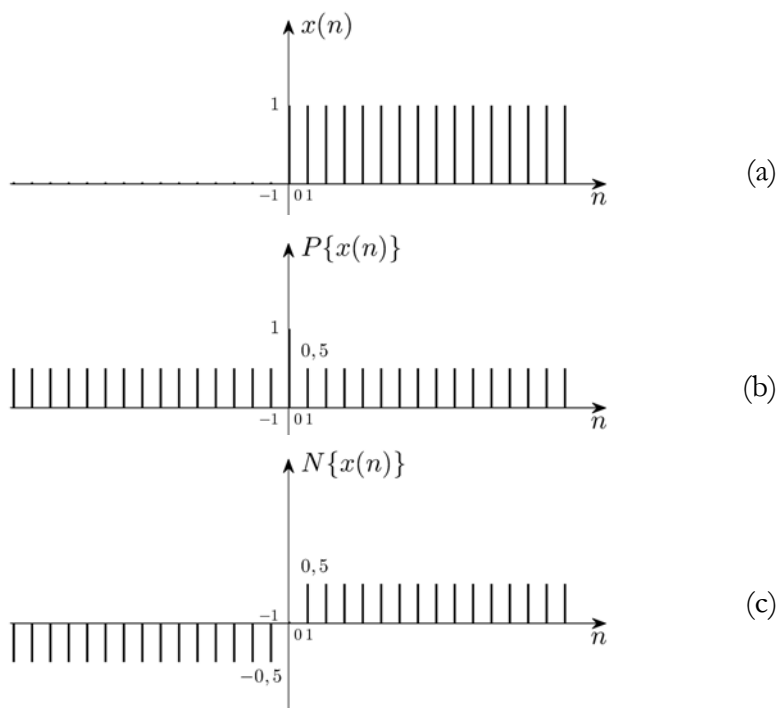
Na Slici 2.3 je na primjeru signala

$$x(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

ilustrovan postupak razlaganja signala na njegov parni i neparni dio. Parni i neparni dijelovi signala su:

$$\mathcal{P}\{x(n)\} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n > 0 \\ 1, & n = 0 \\ \frac{1}{2}, & n < 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

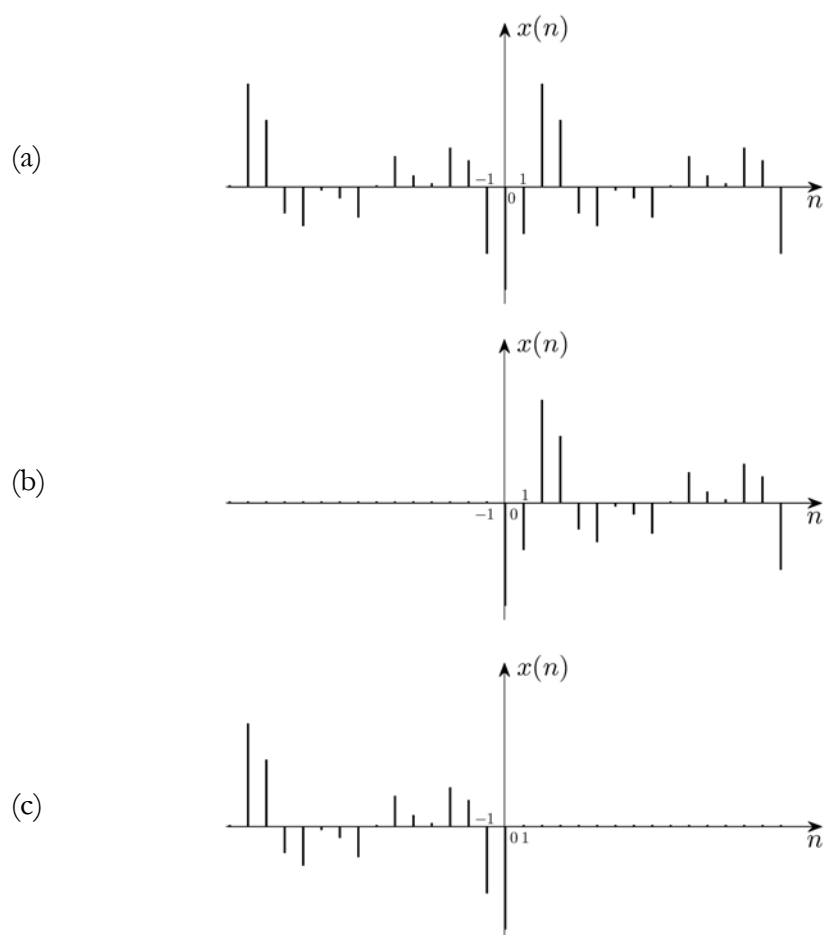
$$\mathcal{N}\{x(n)\} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n > 0 \\ 0, & n = 0 \\ -\frac{1}{2}, & n < 0. \end{cases} \quad (2.9)$$



Slika 2.3 Razlaganje signala na njegov parni i neparni dio: (a) originalni signal; (b) parni dio signala; (c) neparni dio signala.

### 2.1.3 Kauzalni i nekauzalni signali

Diskretni signal je *kauzalan* ako je  $x(n)=0, \forall n < 0$ . Ako  $x(n) \neq 0$  za neko  $n < 0$  signal je *nekauzalan*, a ako je  $x(n)=0, \forall n > 0$  signal je *antikauzalan*. Pri tome smo sa  $n = 0$  označili početni trenutak posmatranja neke pojave sa kojom je dati signal u nekoj relaciji. Primjeri nekauzalnog, kauzalnog i antikauzalnog signala su prikazani na Slici 2.4.



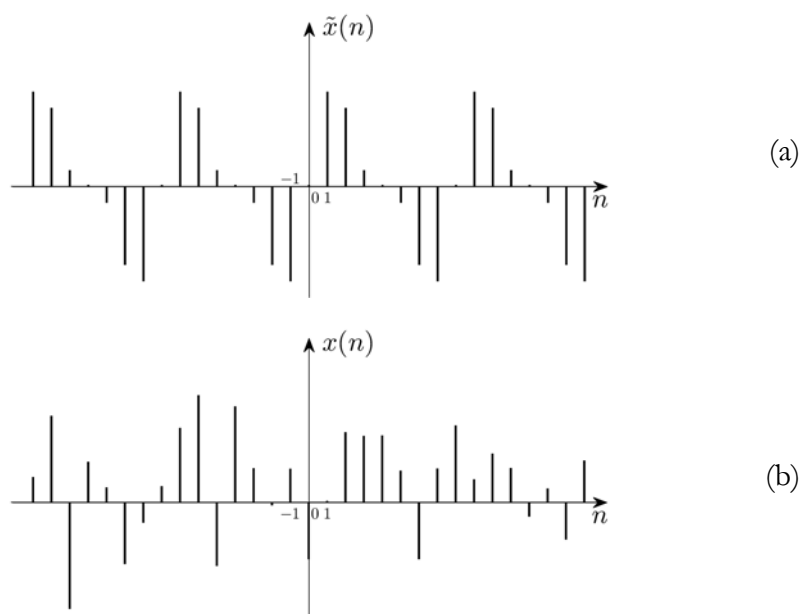
Slika 2.4 (a) Nekauzalan signal; (b) kauzalan signal; (c) antikauzalan signal.

### 2.1.4 Periodični i neperiodični signali

Kažemo da je signal *periodičan* ako postoji pozitivna vrijednost  $N$  takva da vrijedi

$$x(n) = x(n + N), \forall n. \quad (2.10)$$

Ako je diskretni signal periodičan sa periodom  $N$ , periodičan je i sa periodom  $mN$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ . Najmanja pozitivna vrijednost za  $N$  za koju je uslov periodičnosti ispunjen naziva se *fundamentalni period*. Međutim, u slučaju konstantnog diskretnog signala fundamentalni period nije definisan jer je konstantni signal periodičan za bilo koji izbor  $N$ . Primjer periodičnog i neperiodičnog signala dat je na Slici 2.5.



Slika 2.5 (a) Periodičan signal; (b) neperiodičan signal.

### 2.1.5 Signali energije i signali snage

Energija diskretnog signala na intervalu  $[-N, N]$  od  $N$  odmjeraka je definisana sa

$$E_N = \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2. \quad (2.11)$$

Ukupna energija diskretnog signala je

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2. \quad (2.12)$$

Diskretne signale čija je ukupna energija konačna nazivamo *energetskim signalima*. Srednja snaga koja se definiše sa

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2, \quad (2.13)$$

kod energetskih signala je jednaka nuli, jer je  $\lim_{N \rightarrow \infty} E_N$  konačno, pa je

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E_N}{2N+1} = 0. \quad (2.14)$$

Ako signal ima beskonačno veliku ukupnu energiju  $E_x = \lim_{N \rightarrow \infty} E_N \rightarrow \infty$ , njegova srednja snaga može biti konačna ili beskonačna. Signale sa beskonačno velikom energijom i konačnom srednjom snagom (različitom od nule) nazivamo *signalima snage*. Većina diskretnih periodičnih signala su signali snage, jer imaju beskonačnu energiju, ali im je srednja snaga najčešće konačna.

### 2.1.6 Deterministički i stohastički signali

Diskretni signali mogu biti jednoznačno definisani za svaku vrijednost nezavisne varijable. Takve signale nazivamo *deterministički signali*. Ako vrijednosti signala u svakom vremenskom trenutku predstavljaju slučajnu varijablu, radi se o *stohastičkim signalima* ili slučajnim procesima. U okviru ove knjige bavićemo se analizom i obradom determinističkih signala.



## 2.2 Elementarni signali

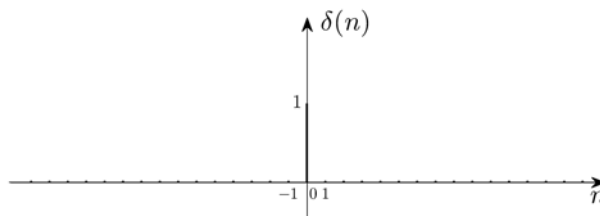
Uvođenjem elementarnih sekvenci, među kojima su najvažniji jedinični impuls i jedinična odskočna sekvenca, pojednostavljuje se analiza i obrada diskretnih signala. Osim ova dva signala, pravougaoni i trougaoni impulsi, te kompleksno-eksponencijalne i sinusne sekvence, igraju važnu ulogu u digitalnoj obradi signala.

### 2.2.1 Jedinični impuls

*Jedinični impuls*, *Kroneker delta* ili jednostavno *delta niz*, je sekvenca definisana sa

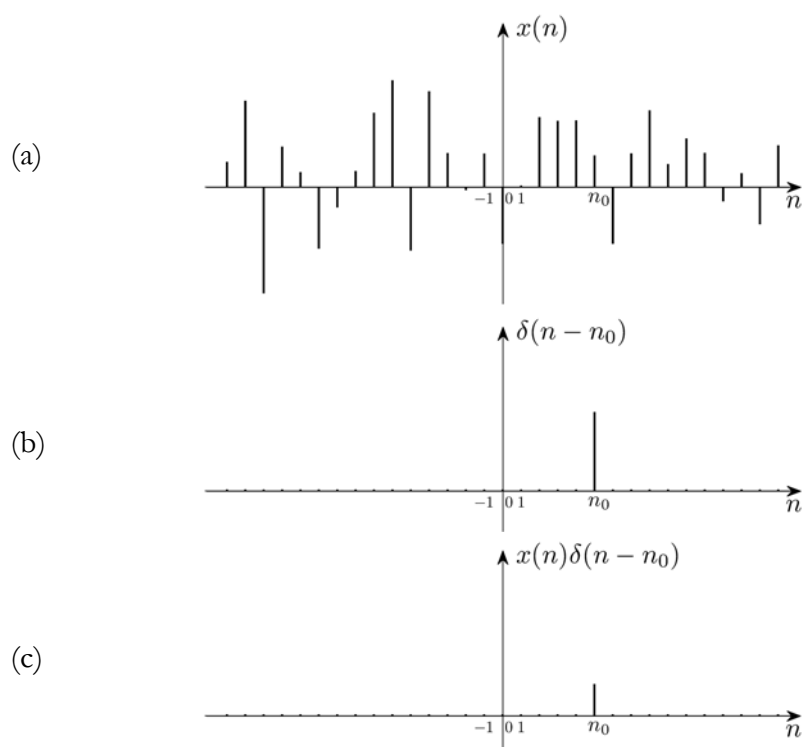
$$\delta(n) \equiv \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Radi se o najjednostavnijem obliku diskretnog signala preko kojega se, kako ćemo kasnije vidjeti, mogu predstaviti diskretni signali proizvoljnog oblika. Jedinični impuls je prikazan na Slici 2.6.



Slika 2.6 Jedinični impuls.

Vrijednost jedinične impulsne sekvence je jednaka nuli za sve vrijednosti diskretnog vremena, osim za  $n=0$ . Delta niz  $\delta(n-n_0)$  koji je pomjeren u vremenu za  $n_0$  diskretnih vremenskih jedinica, jednak je nuli svuda osim za  $n=n_0$ . Stoga se množenjem signala  $x(n)$  proizvoljnog oblika sa transliranim delta nizom  $\delta(n-n_0)$  dobija sekvenca koja je jednaka nuli za svako  $n$ , osim



Slika 2.7 Svojstvo odabiranja jediničnog impulsa: (a) diskretni signal proizvoljnog oblika; (b) pomjeren jedinični impuls; (c) proizvod posmatranog signala i pomjerenog jediničnog impulsa.

za  $n = n_0$ . Za  $n = n_0$  rezultujuća sekvenca ima vrijednost  $x(n_0)$ . Kažemo da delta niz ima *svojstvo odabiranja* vrijednosti signala u tačkama djelovanja jediničnog impulsa. Svojstvo odabiranja ilustrovano je na Slici 2.7.

Jedinični impuls je paran diskretni signal:

$$\delta(n) = \delta(-n). \quad (2.16)$$

Zbog svojstva odabiranja, za signal  $x(n)$  proizvoljnog oblika vrijedi da je

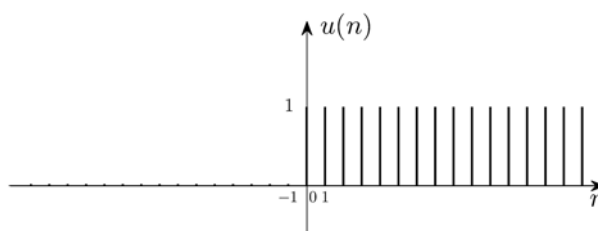
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \delta(n - n_0) = x(n_0) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n - n_0) = x(n_0). \quad (2.17)$$

## 2.2.2 Jedinična odskočna sekvenca

Jedinična odskočna sekvenca je definisana sa:

$$u(n) \equiv \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

i grafički prikazana na Slici 2.8. Jedinična odskočna sekvenca se naziva i *diskretna Hevisajdova funkcija* ili *Hevisajdova sekvenca*.



Slika 2.8 Jedinična odskočna sekvenca.

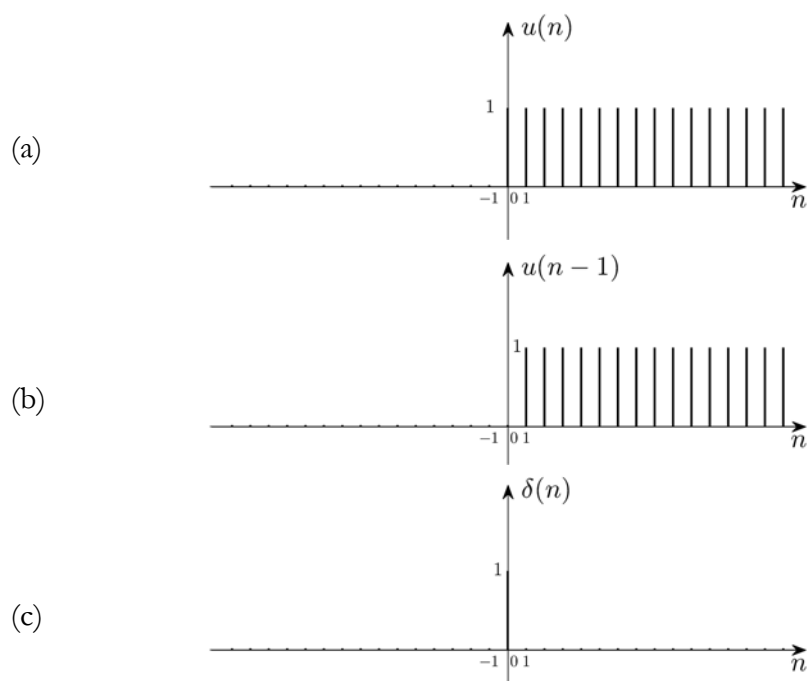
Veza između jedinične odskočne sekvence i jediničnog impulsa igra važnu ulogu u analizi signala i sistema. Jedinični impuls je prva diferencija jedinične odskočne sekvence:

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1), \quad (2.19)$$

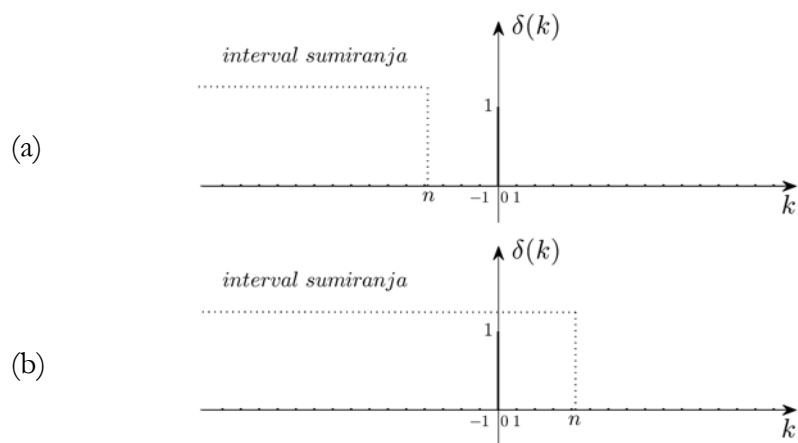
što je, zapravo razlika Hevisajdove i pomjerene Hevisajdove sekvence, što je prikazano na Slici 2.9. S druge strane, jediničnu odskočnu sekvencu možemo dobiti sumiranjem elemenata delta sekvence od  $-\infty$  do  $n$ :

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k), \quad (2.20)$$

kao što je ilustrovano na Slici 2.10. Ako je gornja granica sume manja od nule, rezultat ovog sumiranja je jednak nuli (Slika 2.10.a), a za svako  $n \geq 0$  rezultat sumiranja je jednak jedinici (Slika 2.10.b). Dakle, ovakvim sumiranjem dobijamo sekvencu koja je po definiciji jednaka jediničnoj odskočnoj sekvenci.



Slika 2.9 Jedinični impuls kao prva diferencija Hevisajdove sekvence: (a) Hevisajdova sekvenca; (b) Hevisajdova sekvenca pomjerena za jedan; (c) razlika (a) i (b) jednaka je jediničnom impulsu.

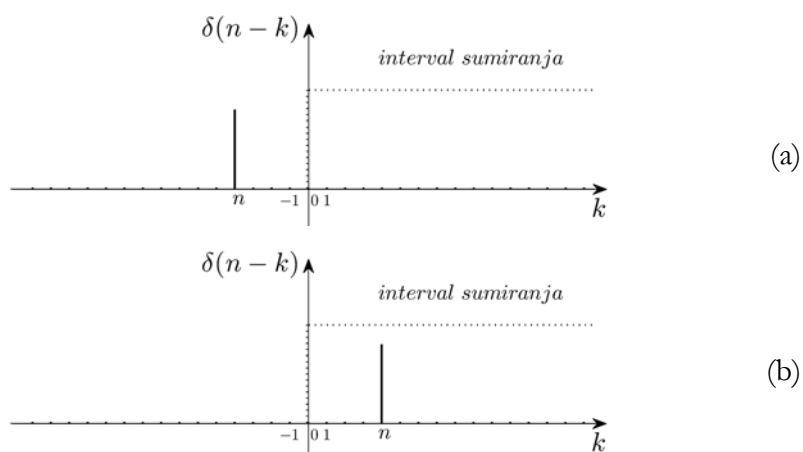


Slika 2.10 Generisanje elemenata Hevisajdove sekvence sumiranjem delta niza: (a) za  $n < 0$ ; (b) za  $n \geq 0$ .

Drugi način predstave jedinične odskočne sekvence preko sume elemenata jedinične impulsne sekvence je dat sljedećom relacijom:

$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k). \quad (2.21)$$

Pomjereni delta niz  $\delta(n-k)$  jednak je nuli osim za  $k=n$ . Ako je  $n < 0$  sumiranjem po  $k$  od nula do beskonačnosti ne obuhvatamo element u  $k=n$  koji je jedini različit od nule, te je i rezultujuća sekvenca jednaka nuli za svako  $n < 0$ . Za bilo koje  $n \geq 0$ , samo jedan element sume, onaj za  $k=n$ , je različit od nule i jednak jedinici, te je i rezultat sume jednak jedinici za svako  $n \geq 0$ . Na taj način generišemo sekvencu koja je po definiciji jednaka jediničnoj odskočnoj sekvenci. Ovaj postupak je ilustrovan na Slici 2.11.

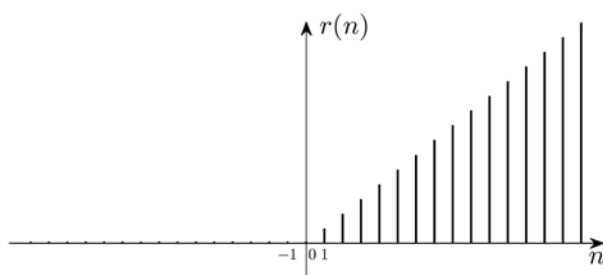


Slika 2.11 Generisanje elemenata Hevisajdove sekvence sumiranjem pomjerene delta sekvence: (a) za  $n < 0$ ; (b) za  $n \geq 0$ .

### 2.2.3 Sekvenca nagiba

Kauzalna *sekvenca nagiba*, prikazana na Slici 2.12, definisana je na sljedeći način:

$$r(n) \equiv \begin{cases} 0, & n < 0 \\ n, & n \geq 0 \end{cases}. \quad (2.22)$$

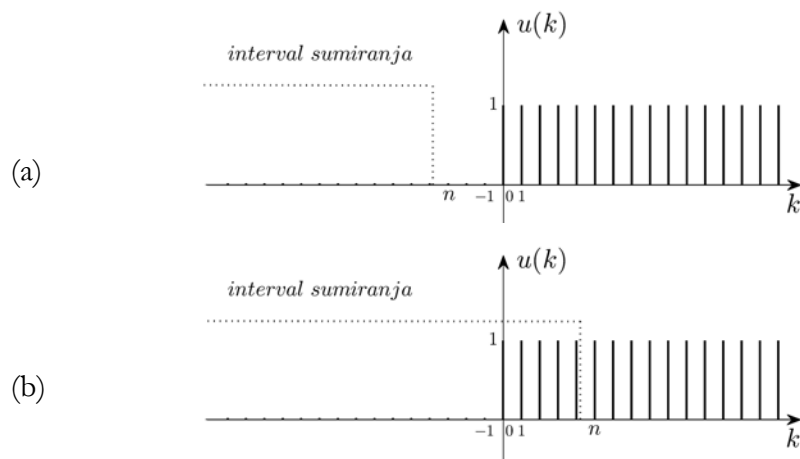


Slika 2.12 Sekvenca nagiba.

Sekvenca nagiba se može dobiti sumiranjem elemenata Hevisajdove sekvence:

$$r(n) = \sum_{k=-\infty}^{n-1} u(k), \quad (2.23)$$

na način isluštovan na Slici 2.13.



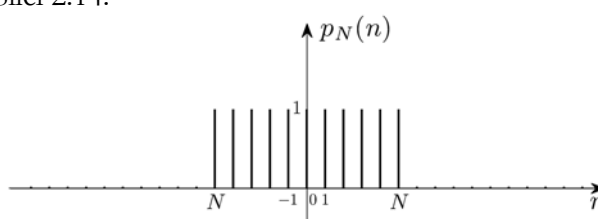
Slika 2.13 Generisanje sekvence nagiba sumiranjem elemenata Hevisajdove sekvence: (a) za  $n < 0$ ; (b) za  $n \geq 0$ .

## 2.2.4 Pravougaoni impuls

Diskretni *pravougaoni impuls*, definisan sa

$$p_N(n) \equiv \begin{cases} 1, & |n| \leq N \\ 0, & |n| > N \end{cases}, \quad (2.24)$$

prikazan je na Slici 2.14.

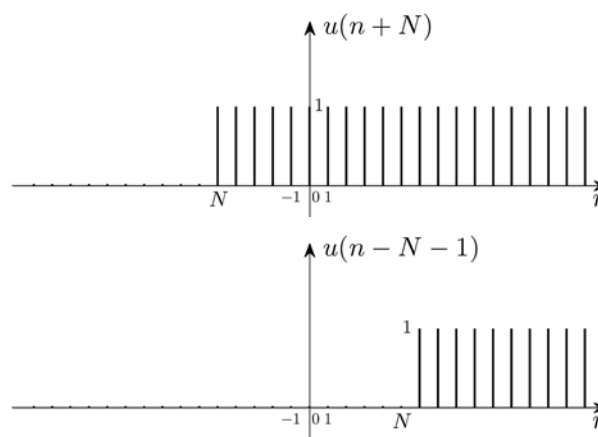


Slika 2.14 Diskretni pravougaoni impuls.

Vrijednosti pravougaonog impulsa se mogu generisati iz jedinične odskočne sekvence na sljedeći način:

$$p_N(n) = u(n + N) - u(n - N - 1). \quad (2.25)$$

Na Slici 2.15 prikazane su pomjerene Hevisajdove sekvence čijim oduzimanjem se dobije diskretni pravougaoni impuls.



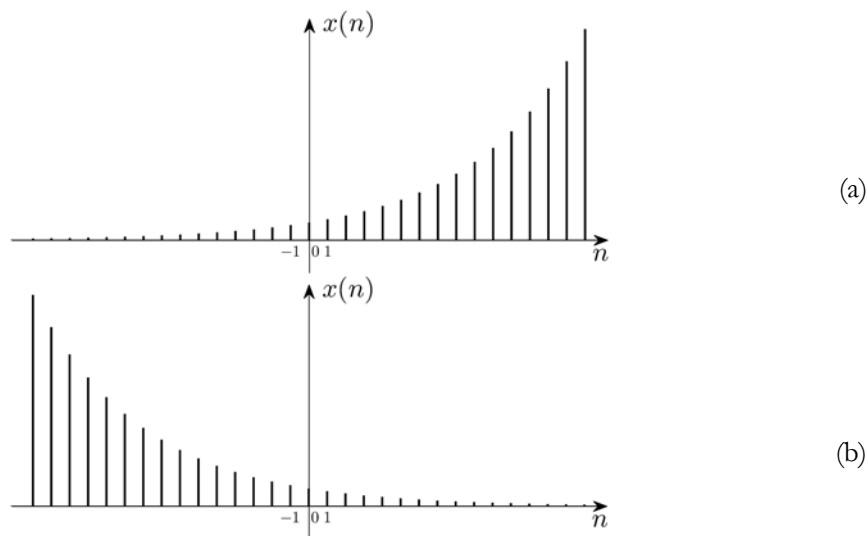
Slika 2.15 Pomjerene Hevisajdove sekvence čijim oduzimanjem se dobije diskretni pravougaoni impuls.

### 2.1.1 Kompleksni eksponencijalni i sinusni signali

Kompleksni eksponencijalni diskretni signal se definiše sa

$$x(n) \equiv C\alpha^n. \quad (2.26)$$

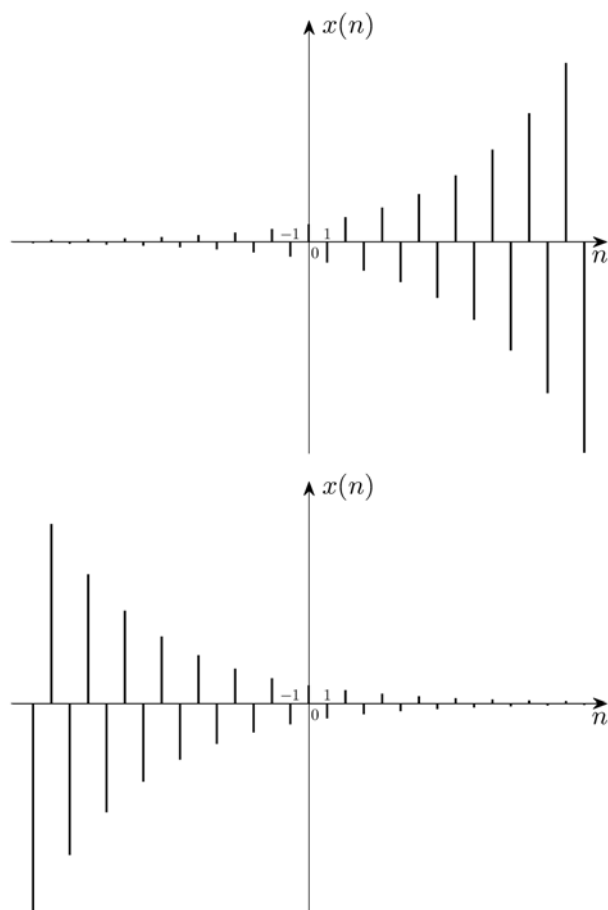
U opštem slučaju  $C$  i  $\alpha$  su kompleksne konstante. Najjednostavniji oblici realnih eksponencijalnih diskretnih signala ( $C, \alpha \in \mathbb{R}$ ) su prikazani na Slici 2.16. Sa porastom diskretne vremenske varijable  $n$  signal eksponencijalno raste ako je  $|\alpha| > 1$ , dok za  $|\alpha| < 1$  signal eksponencijalno opada. Za  $\alpha > 0$  vrijednosti svih elemenata sekvence koja predstavlja signal su pozitivne, kao na Slici 2.16, dok se za  $\alpha < 0$  dobiju sekvence čiji elementi naizmjenično poprimaju pozitivne i negativne vrijednosti, kao što je prikazano na Slici 2.17. Za  $\alpha = 0$  i  $\alpha = 1$  radi se o konstantnom signalu  $x(n) = C$ , dok su za  $\alpha = -1$  elementi sekvence sa parnim indeksima  $x(2n) = C$ , a sa neparnim  $x(2n+1) = -C$ .



Slika 2.16 Realni eksponencijalni diskretni signali oblika  $x(n) = C\alpha^n$ :

(a)  $\alpha > 1$ ; (b)  $0 < \alpha < 1$ .





Slika 2.17 Realni eksponencijalni diskretni signali oblika  $x(n) = C\alpha^n$ :  
 (a)  $\alpha < -1$ ; (b)  $-1 < \alpha < 0$ .

Ako zapišemo kompleksne brojeve  $C$  i  $\alpha$  sa:  $C = |C|e^{j\theta}$  i  $\alpha = |\alpha|e^{j\omega_0}$ , kompleksni eksponencijalni signal  $x(n) = C\alpha^n$  poprima sljedeći oblik:

$$x(n) = |C||\alpha|^n \cos(\omega_0 n + \theta) + j|C||\alpha|^n \sin(\omega_0 n + \theta). \quad (2.27)$$

Za  $|\alpha|=1$  (2.27) postaje:

$$x(n) = Ce^{j\omega_0 n} = |C|e^{j(\omega_0 n + \theta)} = |C|\cos(\omega_0 n + \theta) + j|C|\sin(\omega_0 n + \theta), \quad (2.28)$$

za čiji realni i imaginarni dio vrijedi:

$$\operatorname{Re}\{x(n)\} = |C|\operatorname{Re}\{e^{j(\omega_0 n + \theta)}\} = |C|\cos(\omega_0 n + \theta), \quad (2.29)$$

$$\operatorname{Im}\{x(n)\} = |C|\operatorname{Im}\{e^{j(\omega_0 n + \theta)}\} = |C|\sin(\omega_0 n + \theta) = |C|\cos\left(\omega_0 n + \theta - \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.30)$$

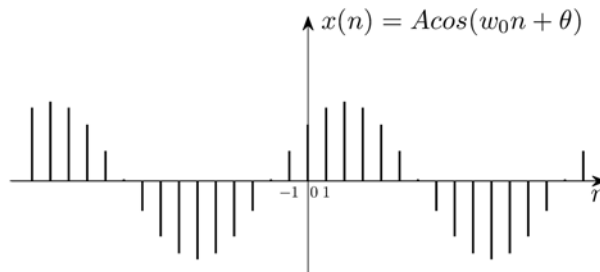
Kompleksne eksponencijalne signale kod kojih je  $|\alpha|=1$  nazivaćemo *kompleksnim sinusnim signalima*. Radi lakšeg označavanja uvešćemo oznaku  $|C|=A$ . Budući da su sinusna i kosinusna matematička funkcija istog oblika, samo međusobno fazno pomjerene za  $\frac{\pi}{2}$ , opšti oblik *realnog diskretnog sinusnog signala* ćemo definisati sa:

$$x(n) \equiv A\cos(\omega_0 n + \theta). \quad (2.31)$$

Primjer realnog diskretnog sinusnog signala prikazan je na Slici 2.18. Koristeći Ojlerovu relaciju

$$e^{j\omega_0 n} = \cos\omega_0 n + j\sin\omega_0 n, \quad (2.32)$$

realni sinusni signal se može izraziti preko kompleksnog sinusnog signala iste



Slika 2.18 Diskretni sinusni signal.

učestanosti i istog faznog stava na sljedeći način:

$$A \cos(\omega_0 n + \theta) = \frac{A}{2} \left( e^{j(\omega_0 n + \theta)} + e^{-j(\omega_0 n + \theta)} \right). \quad (2.33)$$

Za razliku od kontinualnih sinusnih signala oblika  $x(t) = A \cos(\Omega_0 t + \theta)$ , kod kojih je kružna učestanost  $\Omega_0 = 2\pi F_0$  izražena u radijanima u sekundi, a sama frekvencija  $F_0$  u Hz, *digitalna kružna učestanost*  $\omega_0 = 2\pi f_0$  se izražava u radijanima, a *digitalna frekvencija*  $f_0$  je neimenovan broj. Faza  $\theta$  se izražava u radijanima. Pojmove digitalna kružna učestanost i digitalna frekvencija najlakše je objasniti posmatrajući diskretni signal koji nastaje odmjeravanjem kontinualnog signala sa korakom odmjeravanja  $\Delta t$ , odnosno frekvencijom odmjeravanja  $F_s = \frac{1}{\Delta t}$ :

$$\begin{aligned} \cos(\Omega_0 t + \theta) \Big|_{t=n\Delta t} &= \cos(\Omega_0 n \Delta t + \theta) = \cos\left(2\pi \frac{F_0}{F_s} n + \theta\right) \\ &= \cos(2\pi f_0 n + \theta) = \cos(\omega_0 n + \theta), \end{aligned} \quad (2.34)$$

gdje smo uveli oznake  $f_0 = \frac{F_0}{F_s}$  i  $\omega_0 = 2\pi f_0$ . Pri promjeni digitalne frekvencije

$f_0$ , slično kao kod kontinualnih signala pri promjeni analogne frekvencije  $F_0$ , mijenja se brzina oscilacija diskretnog sinusnog signala. Međutim, postoje značajne razlike u uticaju analogne i digitalne frekvencije na ponašanje sinusnih signala u kontinualnom i diskretnom domenu, respektivno. Pokazaćemo da, za razliku od kontinualnih sinusnih signala oblika  $e^{j2\pi F_0 t}$  koji su periodični za bilo koju vrijednost analogne frekvencije  $F_0$ , diskretni sinusni signali nisu periodični za bilo koju vrijednost digitalne frekvencije  $f_0$ . Osim toga, za razliku od kontinualnih sinusnih signala, kod kojih većoj vrijednosti frekvencije  $F_0$  odgovaraju brže oscilacije signala, diskretni sinusni signal nema kontinualan porast brzine oscilacija pri porastu digitalne frekvencije  $f_0$ .

Da bi diskretni sinusni signal  $e^{j\omega_0 n}$  bio periodičan u domenu diskretnog vremena sa nekim periodom  $N > 0$ , mora da vrijedi:

$$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n} \quad (2.35)$$

ili, ekvivalentno:

$$e^{j\omega_0 N} = 1. \quad (2.36)$$

Ako je  $\omega_0 = 0$  radi se o konstantnom signalu  $x(n) = 1$ , koji je periodičan za svaku vrijednost  $N$ , te fundamentalni period nije definisan. Ako je  $\omega_0 \neq 0$ , uslov periodičnosti kod diskretnih sinusnih signala je dat sa:

$$\omega_0 N = 2m\pi \Rightarrow \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}. \quad (2.37)$$

Iz (2.37) zaključujemo da diskretni sinusni signal  $e^{j\omega_0 n}$  nije periodičan za proizvoljnu vrijednost  $\omega_0$ , već samo ako je  $\frac{\omega_0}{2\pi}$  racionalan broj. Na primjer, diskretni sinusni signal  $e^{j\omega_0 n}$  je periodičan za  $\omega_0 = \frac{2\pi}{12}$ , jer je  $\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{12}$  racionalan broj i fundamentalni period ovog signala je  $N = 12$ . Za  $\omega_0 = \frac{8\pi}{23} \Rightarrow \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{4}{23} \Rightarrow N = 23$ , sinusni signal je periodičan sa fundamentalnim periodom  $N = 23$ , dok sinusni signal digitalne učestanosti  $\omega_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{4\pi}$  nije periodičan. Primjeri diskretnih sinusnih signala su prikazani na Slici 2.19.

Već smo pomenuli da, za razliku od kontinualnih sinusnih signala kod kojih većoj vrijednosti učestanosti  $\Omega_0$  odgovaraju brže oscilacije signala, diskretni sinusni signali nemaju kontinualan porast brzine oscilacija pri porastu digitalne učestanosti  $\omega_0$ . Posmatrajmo diskretne sinusne signale digitalnih učestanosti  $\omega_0 + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ :

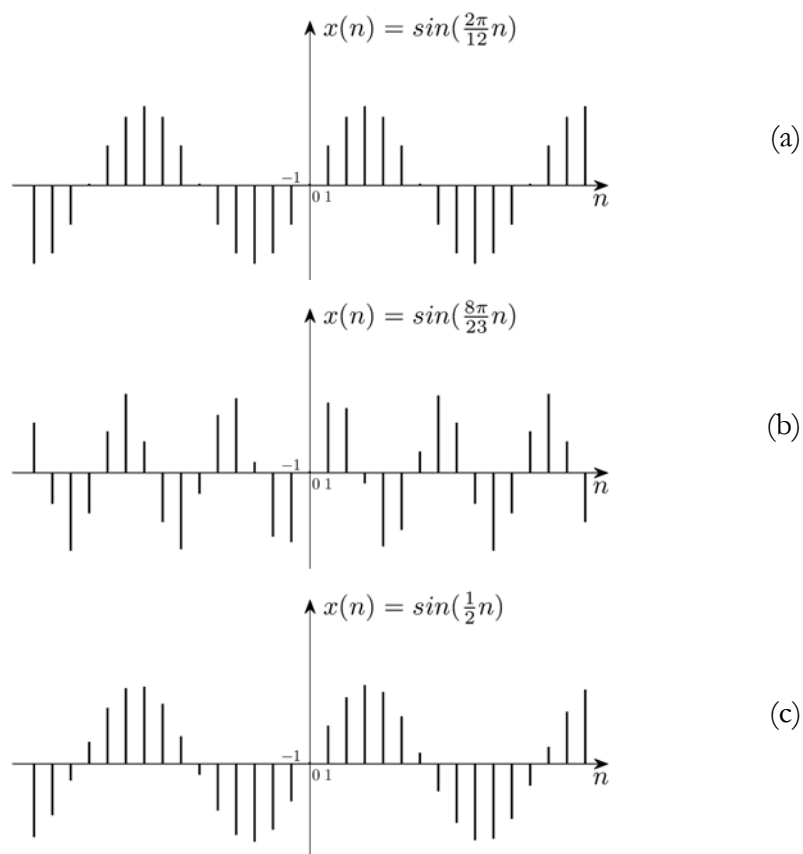
$$e^{j(\omega_0 + 2k\pi)n} = e^{j\omega_0 n} e^{j2k\pi n} = e^{j\omega_0 n}. \quad (2.38)$$

Iz (2.38) se jasno vidi da su sinusni signali digitalnih učestanosti  $\omega_0 + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  identični. Osim toga, sinusni signali čije se učestanosti razlikuju za  $\pi$  imaju istu brzinu oscilacija, jer je:

$$e^{j(\omega_0 + \pi)n} = e^{j\omega_0 n} e^{j\pi n} = -e^{j\omega_0 n}. \quad (2.39)$$

Takođe, identični su i signali učestanosti  $\omega_0$  i  $2\pi - \omega_0$ :

$$e^{j(2\pi - \omega_0)n} = e^{j2\pi n} e^{-j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 n}. \quad (2.40)$$



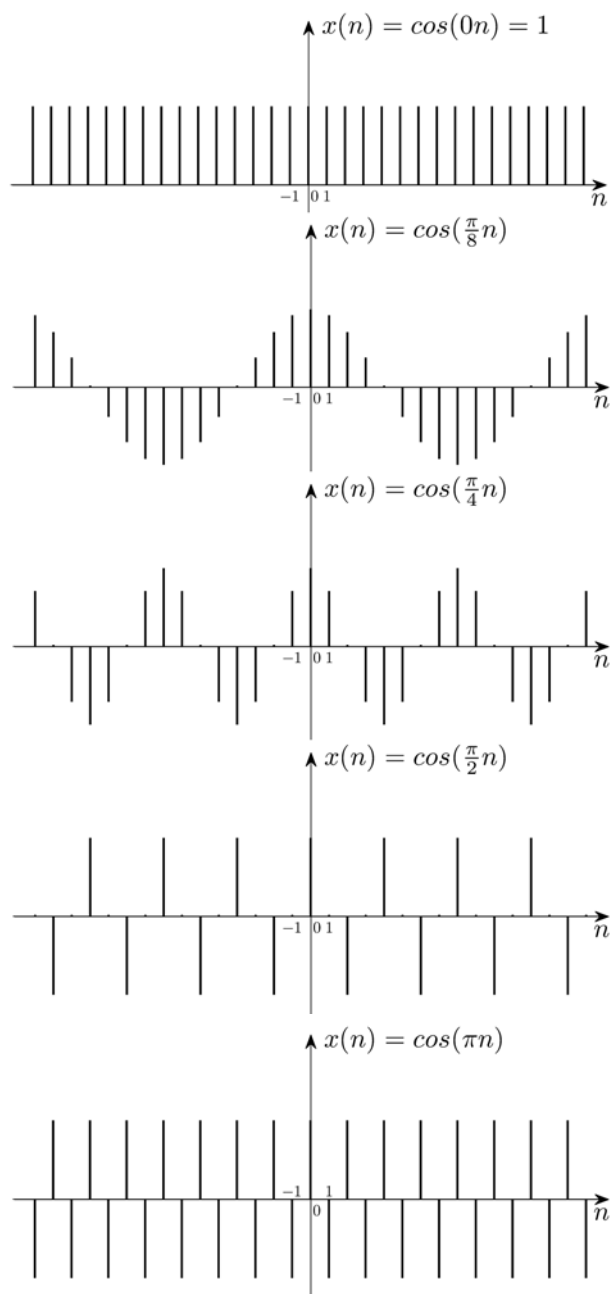
Slika 2.19 Primjeri periodičnih i neperiodičnih diskretnih sinusnih signala:

(a) sinusni signal učestanosti  $\omega_0 = \frac{2\pi}{12}$  sa fundamentalnim periodom

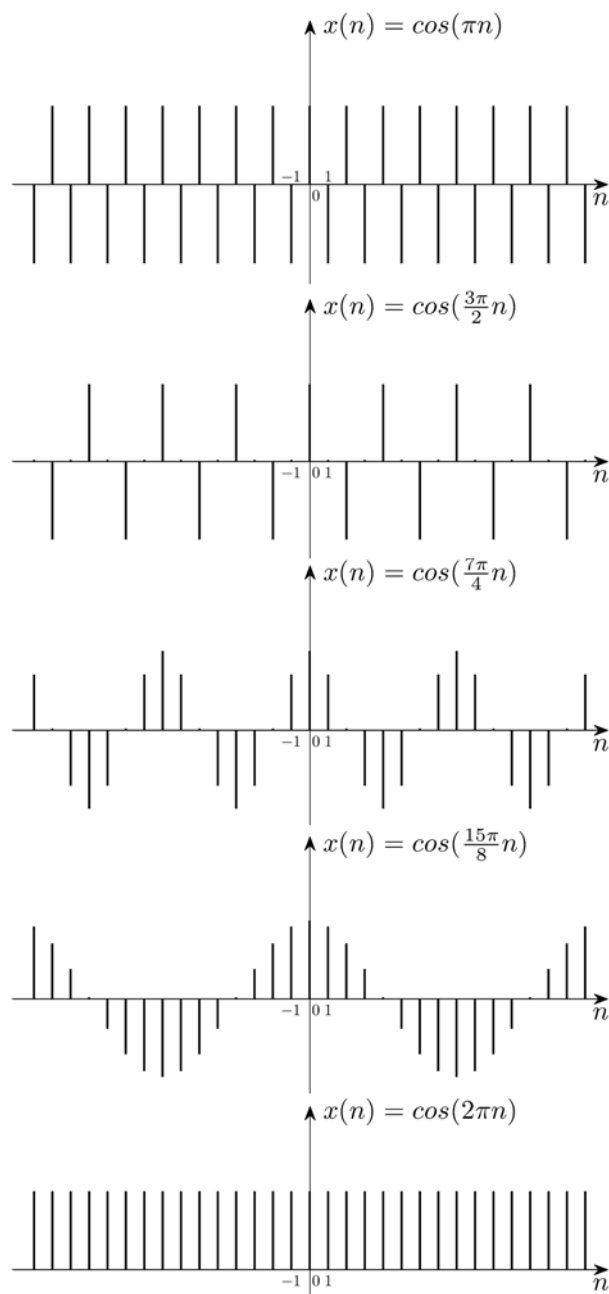
$N = 12$ ; (b) sinusni signal učestanosti  $\omega_0 = \frac{8\pi}{23}$  sa fundamentalnim

periodom  $N = 23$ ; (c) neperiodičan sinusni signal učestanosti  $\omega_0 = \frac{1}{2}$ .

Znajući navedene osobine (2.38-2.40) zaključujemo da se oscilacije diskretnih sinusnih signala ubrzavaju pri porastu učestanosti  $\omega_0$  od 0 do  $\pi$ , a zatim usporavaju pri porastu učestanosti od  $\pi$  do  $2\pi$ , kao što prikazuju slike 2.20 i 2.21. Daljnjim porastom učestanosti ponavljaju se oblici signala.



Slika 2.20 Promjena brzine oscilacija sinusnih signala sa promjenom digitalne učestanosti u intervalu  $[0, \pi]$ .



Slika 2.21 Promjena brzine oscilacija sinusnih signala sa promjenom digitalne učestanosti u intervalu  $[\pi, 2\pi]$ .

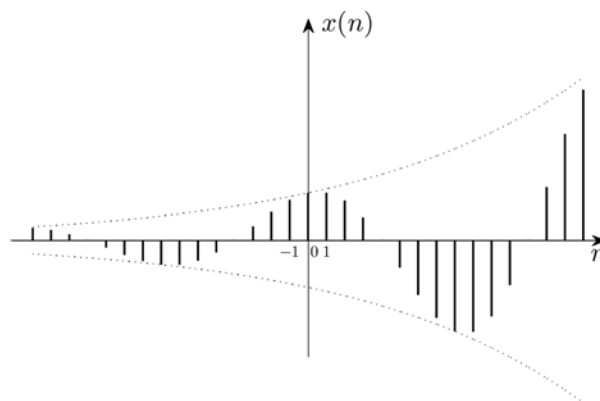
Iz opšteg oblika kompleksnog eksponencijalnog signala

$$x(n) = |C||\alpha|^n \cos(\omega_0 n + \theta) + j|C||\alpha|^n \cos\left(\omega_0 n + \theta - \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.41)$$

se za  $|\alpha|=1$  dobiju kompleksni eksponencijalnim signali sa realnim i imaginarnim dijelom u obliku sinusnih signala, čija periodičnost ovisi o tome da li je ispunjen uslov (2.37). Za  $|\alpha| \neq 1$  realni i imaginarni dijelovi kompleksnog eksponencijalnog signala su *pseudo sinusni signali*. Za  $|\alpha| > 1$  anvelopa ovih signala je rastuća eksponencijalna funkcija, dok je anvelopa signala kod kojih je  $|\alpha| < 1$  opadajuća eksponencijalna funkcija. Opadajući pseudo sinusni signal  $x(n) = |C||\alpha|^n \cos(\omega_0 n + \theta)$ , uz  $|\alpha| < 1$ , se često naziva *prigušena sinusoida*. Oblici pseudo sinusnih signala za  $|\alpha| > 1$  su prikazana na Slici 2.22, a za  $|\alpha| < 1$  na Slici 2.23. Tačkaste linije predstavljaju anvelope oscilacija.

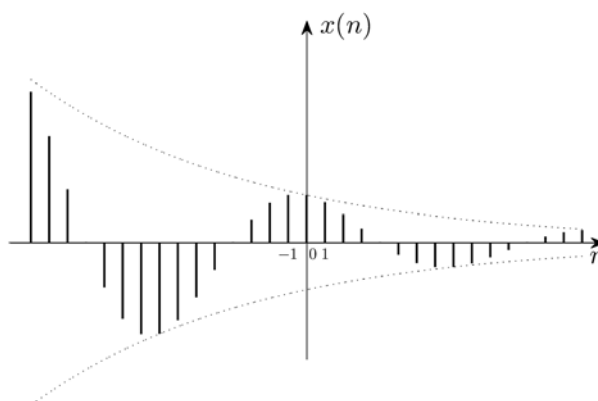
Neka je  $N_0$  fundamentalni period diskretnog kompleksnog eksponencijalnog signala. *Fundamentalna digitalna ugaona učestanost* se definiše sa  $\omega_0 = 2\pi/N_0$ . Kod harmonijski vezanih kompleksnih eksponencijalnih signala fundamentalne učestanosti su jednake cjelobrojnom umnošku jedne pozitivne učestanosti  $\omega_0$ :

$$x_k(n) = C_k e^{jk\omega_0 n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.42)$$



Slika 2.22 Rastući pseudo sinusni signal.





Slika 2.23 Opadajući pseudo sinusni signal.

Signali kod kojih su fundamentalne učestanosti harmonijski vezane nazivaju se *harmonicima*. Nulti harmonik  $x_0(n) = C_0$  je konstanta, dok je za svaku drugu vrijednost  $k$  harmonik  $x_k(n)$  periodičan kompleksni eksponencijalni signal sa fundamentalnim periodom  $\frac{2\pi}{|k|\Omega_0}$ , te je njegova fundamentalna učestanost  $k\Omega_0$ . Osim toga, svi harmonici  $x_k(n)$  imaju zajednički prirod  $N_0$ .

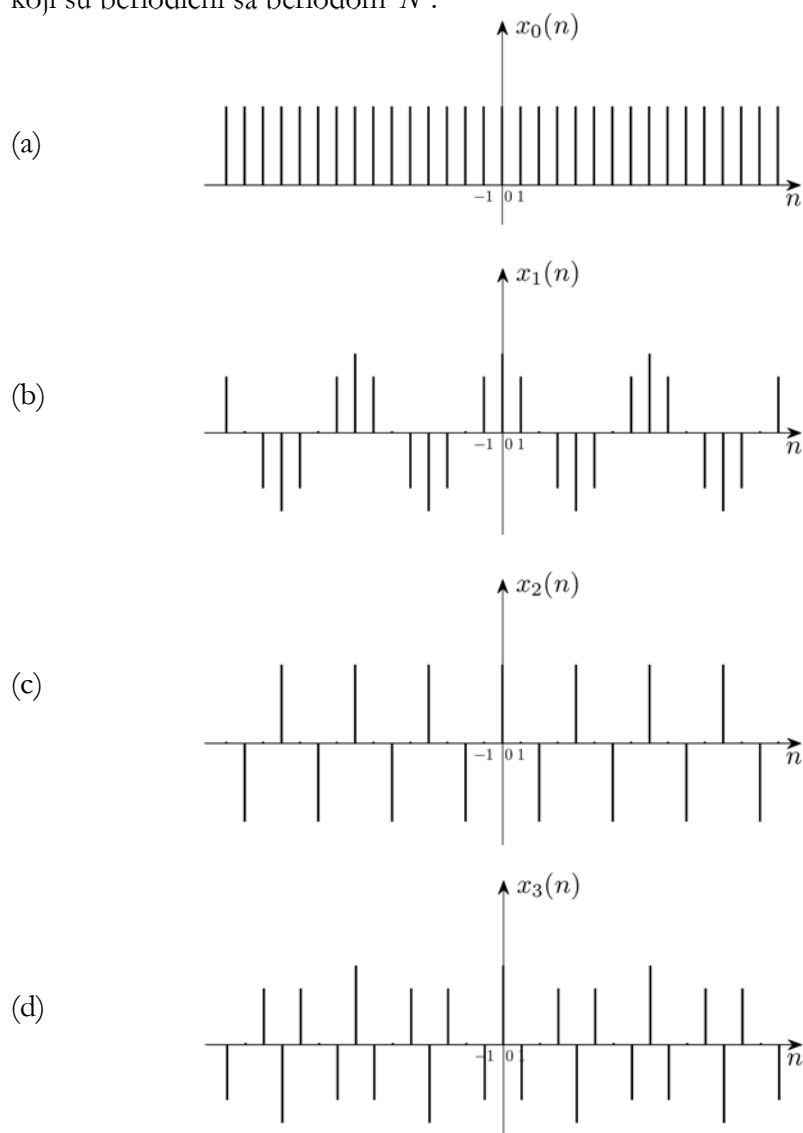
#### Primjer 2.1:

Pokazati da postoji samo  $N$  različitih kompleksnih sinusnih signala  $e(n) = Ae^{j(\omega n + \varphi)}$  koji su periodični sa periodom  $N$  i različiti. Za  $N=8$  nacrtati kompletan skup realnih dijelova kompleksnih sinusnih signala uz  $\varphi = 0$ .

#### *Rješenje:*

Iz uslova periodičnosti diskretnih sinusnih signala signala (2.37) slijedi da učestanost mora da bude  $\omega = \omega_k = k \frac{2\pi}{N}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  da bi diskretni sinusni signal bio periodičan sa periodom  $N$ . Kako smo već ranije pokazali da se kompleksni sinusni signali  $e(n) = Ae^{j(\omega n + \varphi)}$  učestanosti  $\omega$  i  $\omega + 2m\pi$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  ne mogu

razlikovati, slijedi da postoji samo  $N$  različitih kompleksnih sinusnih signala koji su periodični sa periodom  $N$ .



Slika 2.24 Realni dijelovi kompleksnih sinusnih signala  $e(n) = e^{jk\frac{2\pi}{8}n}$  periodičnih sa periodom  $N=8$ , za: (a)  $k=0$ ; (b)  $k=1$ ; (c)  $k=2$  i (d)  $k=3$ .

Na Slici 2.24 prikazani su realni dijelovi kompleksnih sinusnih signala iste amplitude i nultog faznog stava, za učestanosti  $\omega = k \frac{2\pi}{8}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ . Realni dijelovi kompleksnih sinusnih signala nultog faznog stava, čije su učestanosti  $\omega = k \frac{2\pi}{N}$  i  $\omega = (N - k) \frac{2\pi}{N}$  su jednaki, dok su imaginarni djelovi tih signala jednaki po apsolutnoj vrijednosti, ali suprotnog znaka, jer vrijedi da je:

$$e^{j(N-k)\frac{2\pi}{N}n} = e^{j\left(2\pi n - k\frac{2\pi}{N}n\right)} = e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}. \quad (2.43)$$

□

## 2.2 Operacije nad signalima

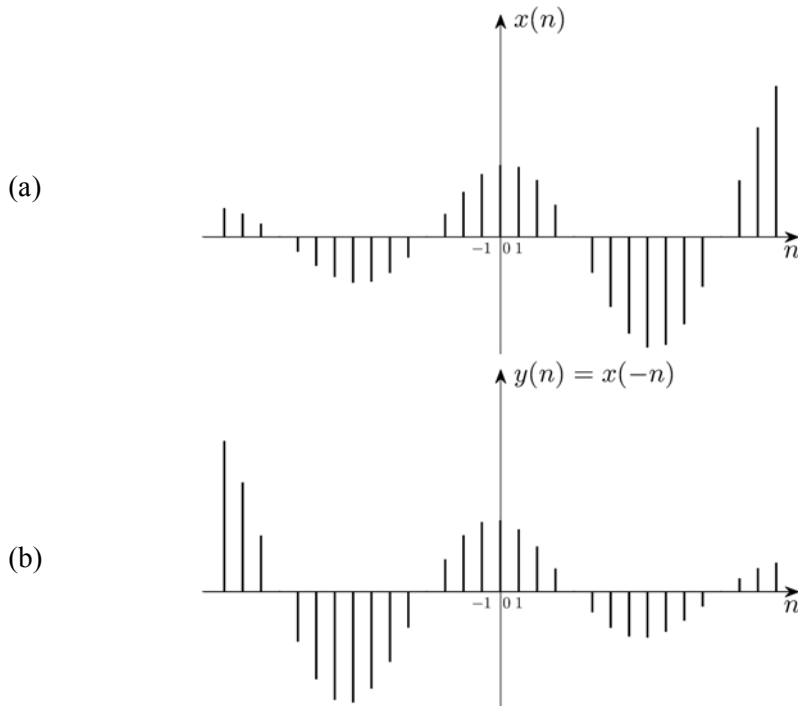
Operacije nad signalima možemo podijeliti u dvije grupe. Prvu grupu čine operacije koje se zasnivaju na transformacijama nezavisne varijable i tu ubrajamo refleksiju, pomijeranje (translaciju) i skaliranje signala. Diskretni signali predstavljeni su sekvencama brojeva, tako da druga grupa operacija nad signalima zapravo predstavlja osnovne matematičke operacije nad sekvencama brojeva: sabiranje, oduzimanje, množenje i dijeljenje član po član. Posebno ćemo izdvojiti konvoluciju, najvažniju matematičku operaciju u analizi i obradi signala, koja u vremenskom domenu uspostavlja vezu između signala koji pobuđuje neki sistem i njegovog odziva.

### 2.2.1 Transformacije nezavisne varijable

Signal  $y(n)$  predstavlja *refleksiju signala*  $x(n)$  oko  $n = 0$  ako je:

$$y(n) = x(-n), \quad \forall n. \quad (2.44)$$

Refleksija signala se može definisati i oko neke druge tačke umjesto oko  $n = 0$ . Na Slici 2.24 je ilustrovana refleksija signala.



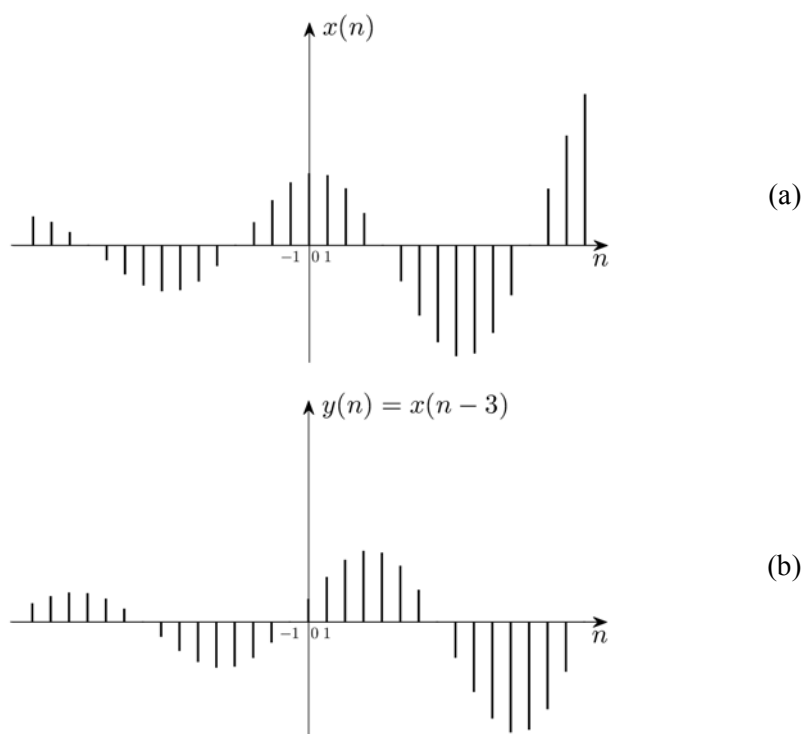
Slika 2.24 Refleksija signala: (a) originalni i (b) reflektovani signal.

*Translacija signala* za neki iznos  $n_0$  odgovara pomaku signala po vremenskoj osi za isti iznos:

$$y(n) = x(n - n_0), \quad \forall n. \quad (2.45)$$

Signal  $y(n)$  može da kasni ili da prednjači u odnosu na signal  $x(n)$ . Ako je  $n_0 > 0$ , signal  $y(n)$  kasni za signalom  $x(n)$  za  $n_0$  odmjeraka. Tada prvo pristižu odmjerci signala  $x(n)$ , a zatim odmjerci signala  $y(n)$ . Na primjer, za  $n_0 = 3$ , odmjerak koji se u signalu  $x(n)$  pojavio u trenutku  $n = 0$ , u signalu  $y(n)$  se pojavljuje sa 3 vremenska intervala zakašnjenja:  $y(3) = x(0)$ . Za  $n_0 < 0$  prvo pristižu odmjerci signala  $y(n)$ , pa kažemo da signal  $y(n)$  prednjači u

odnosu na signal  $x(n)$ . Tako, na primjer za  $n_0 = -3$ , odmjerak koji se u signalu



Slika 2.25 Translacija signala: (a) originalni i (b) translirani signal.

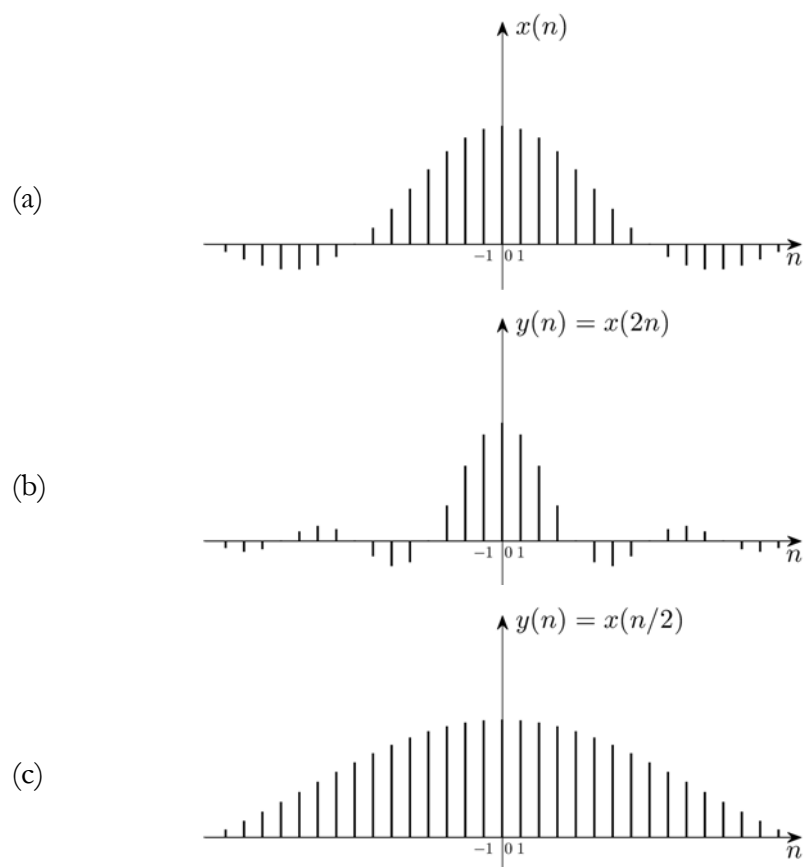
$x(n)$  pojavljuje u trenutku  $n = 3$ , u signalu  $y(n)$  se pojavljuje 3 vremenska intervala ranije:  $y(0) = x(3)$ . Translacija signala uz  $n_0 > 0$  je ilustrovana na Slici 2.26.

Linearnu promjenu skale nezavisne varijable nazivamo *skaliranje signala*. Dakle, skalirani signal se analitički zapisuje sa:

$$y(n) = x(an), \quad \forall n, a \in \mathbb{R}. \quad (2.46)$$

Pri  $a > 1$  signal se sužava, a za  $a < 1$  proširuje. Ilustracija skaliranja data je na Slici 2.26. Prilikom skaliranja signala sa necjelobrojnim faktorom  $a$  potrebno

je izvršiti interpolaciju originalnog signala kako bi se odredile njegove vrijednosti za necjelobrojne vrijednosti vremenske varijable.



Slika 2.26 Skaliranje signala: (a) originalni signal; (b) signal skaliran sa faktorom  $a = 2$ ; (c) signal skaliran sa faktorom  $a = \frac{1}{2}$ .

### 2.2.1 Osnovne matematičke operacije nad signalima

*Sabiranje i oduzimanje signala*  $x_1(n)$  i  $x_2(n)$  se definišu sa:

$$y(n) = x_1(n) \pm x_2(n), \quad \forall n, \quad (2.47)$$

dok je *množenje signala član po član* dato sa:

$$y(n) = x_1(n) \cdot x_2(n), \quad \forall n, \quad (2.48)$$

slično kao i *dijeljenje signala član po član*, koje je od manjeg značaja u obradi signala od:

$$y(n) = \frac{x_1(n)}{x_2(n)}, \quad \forall n.$$